A preorder of chord diagrams, coming from spherical curve

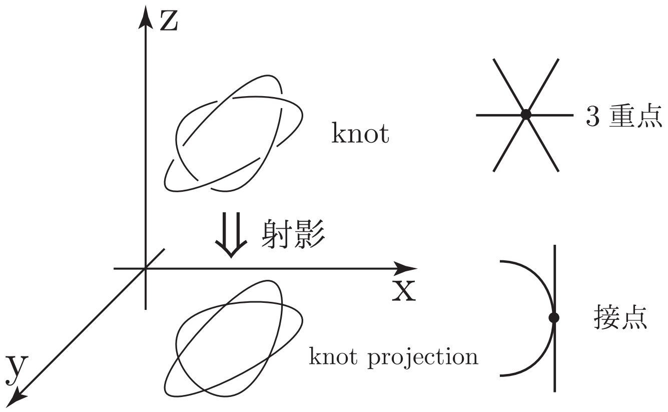
瀧村祐介

概　　要

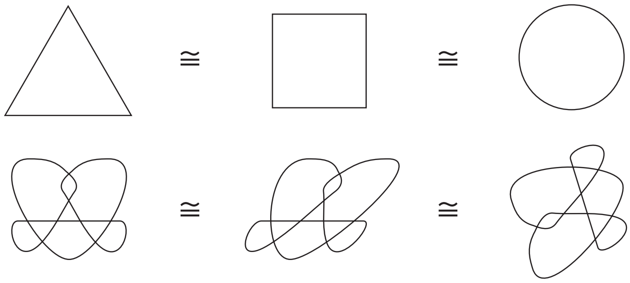
円周上に偶数個の点が配置され，2 点ずつ chord で結ばれたものを chord diagram という．knot projection を，円周の球面へのはめ込みとしたときの逆像において，同一の交点となる 2 点をつなぐことにより，chord diagram が得られる．chord diagram における preorder を定義し，knot projection の集合の特徴付けを行った［3］.

1. Introduction

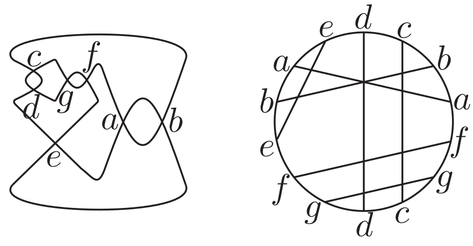
$\mathbb{R}^3$ に滑らかに埋め込まれた円周を knot という．knot を 2 次元平面に射影したものを knot projection という．その際，3 重点や接点がないようにする．平面に無限遠点をたすことで，knot projection を球面上で扱う．



2 つの位相空間対 (X,A) から (Y,B) への連続写像 $f : (X,A) \to (Y,B)$ が全単射で，その逆写像も連続であるとき，(X,A) と (Y,B) は同相であるといい，$\cong$ で表す．ここでは同相により knot や knot projection を同一視し，鏡像は区別しないものとする．



Definition 1.　円周上に $2n$ 個の点を，2 点ずつペアにして配置したものを chord diagram といい，CD と表す．CD の円周上のペアの 2 点は，chord で結ぶことにする．knot projection P の crossing の逆像を chord で結ぶことによって, P の chord diagram が得られ, CD_P と表す．CD を実現する knot projection が存在するとき，CD を実現可能と呼ぶ.



P　　CD_P

Definition 2.　$CD^{(A)}$, $CD^{(B)}$ を chord diagram とする．chord diagram CD_P が $CD^{(A)}$ を含むような knot projection P 全体からなる集合を $PROJ(CD^{(A)})$ と表す．$PROJ(CD^{(A)}) \supset PROJ(CD^{(B)})$ が成り立つとき，$CD^{(B)}$ は $CD^{(A)}$ の *minor* であるといい，$CD^{(A)} \geq CD^{(B)}$ または $CD^{(B)} \leq CD^{(A)}$ と表す.

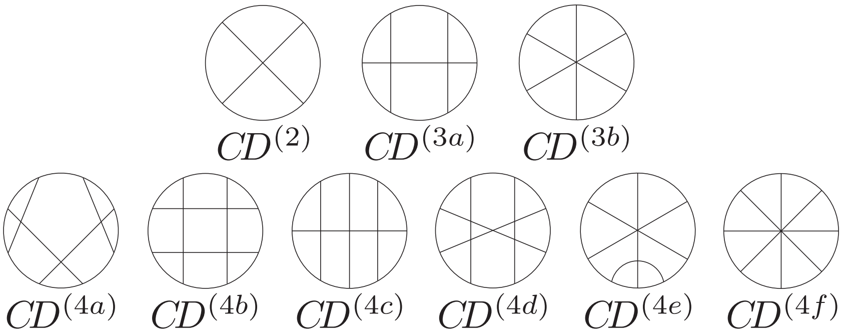
Proposition 1.　任意の CD において，$PROJ(CD) \neq \emptyset$ である.

Proposition 2.　$CD^{(A)}$, $CD^{(B)}$ を chord diagram とする.
（1）$CD^{(B)}$ が $CD^{(A)}$ を含んでいれば，$PROJ(CD^{(A)}) \supset PROJ(CD^{(B)})$ である.
（2）$CD^{(B)}$ が実現可能で, $PROJ(CD^{(A)}) \supset PROJ(CD^{(B)})$ であれば, $CD^{(B)}$ は $CD^{(A)}$ を含んでいる.

Proposition 3.　全ての chord diagram からなる集合を $\mathcal{ACD}$ と表す．次の (1), (2) が成り立つため，$(\mathcal{ACD}, \leq)$ は preordered set になる.
（1）$CD^{(A)} \leq CD^{(A)}$ (the reflexive law)
（2）$CD^{(A)} \leq CD^{(B)}$ かつ $CD^{(B)} \leq CD^{(C)}$ ならば $CD^{(A)} \leq CD^{(C)}$ (the transitive law)

Proposition 4.　全ての実現可能な chord diagram からなる集合を $\mathcal{ARCD}$ と表す．Proposition 2 より，Proposition 3 の (1), (2) と次の (3) が成り立つため，$(\mathcal{ARCD}, \leq)$ は partially ordered set になる.
（3）$CD^{(A)} \leq CD^{(B)}$ かつ $CD^{(B)} \leq CD^{(A)}$ ならば $CD^{(A)} \cong CD^{(B)}$ (the antisymmetriclaw)

knot における preorder は［4］で定義されている．$PROJ(CD^{(X)})(X \in \{2, 3a, 3b\})$ については,［1, 2］で研究されている．今回，$PROJ(CD^{(Y)})(Y \in \{4a, 4b, 4c, 4d, 4e, 4f\})$ について，次の結果を得た.



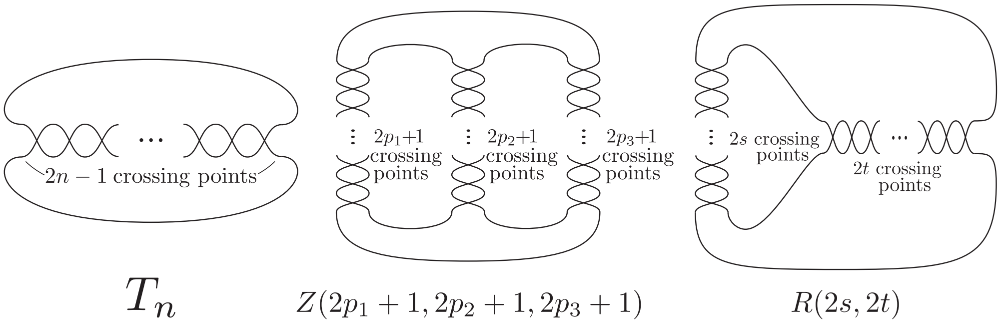
Theorem 1. $CD^{(4e)}$ は $CD^{(4d)}$ の minor である．

Theorem 2. P を prime knot projection とする．

（1）CD_P が $CD^{(3b)}$ を含み，$CD^{(4d)}$ を含まないなら，P は T_n $(n \geq 2)$ である．

（2）CD_P が $CD^{(3b)}$ を含み，$CD^{(4e)}$ と $CD^{(4f)}$ を含まないなら，P は $Z(2p_1+1, 2p_2+1, 2p_3+1)$ である．

（3）CD_P が $CD^{(3a)}$ を含み，$CD^{(4a)}$ と $CD^{(4d)}$ を含まないなら，P は $R(2s, 2t)$ である．



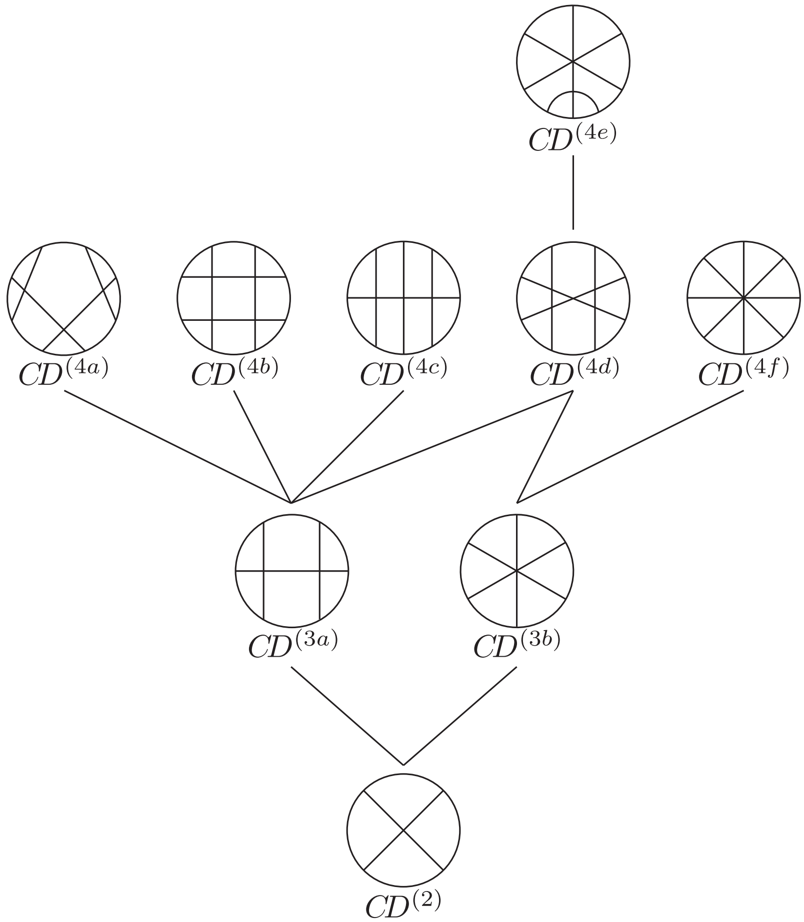
Theorem 3. CD_P が $CD^{(4d)}$ を含むなら，CD_P は $CD^{(4a)}$, $CD^{(4b)}$, $CD^{(4c)}$ のどれかを少なくとも 1 つ含む．

Proposition 5.

（1）CD_P が $CD^{(3a)}$ を含むなら，CD_P は $CD^{(4b)}$ または $CD^{(4d)}$ を含む．

（2）CD_P が $CD^{(4a)}$ を含むなら，CD_P は $CD^{(4c)}$ または $CD^{(4d)}$ を含む．

Proposition 2 (1) と Theorem 1 より，図のような Hasse diagram が得られる．線の上側の chord diagram は，線の下側の chord diagram の minor であることを表している．



$\mathcal{T} = \{T_n \mid n$: positive integer$\}$, $\mathcal{Z} = \{Z(2p_1 + 1, 2p_2 + 1, 2p_3 + 1) \mid p_1, p_2, p_3$: non-negative integers$\}$, $\mathcal{R} = \{R(2s, 2t) \mid s, t$: positive integers$\}$ とする．chord diagram CD_P が $CD^{(A)}$ を含むような prime knot projection P 全体からなる集合を $\mathcal{P}$-$PROJ(CD^{(A)})$ と表す．以上より，図のような Venn diagram が得られる．$\emptyset$ は空集合である．

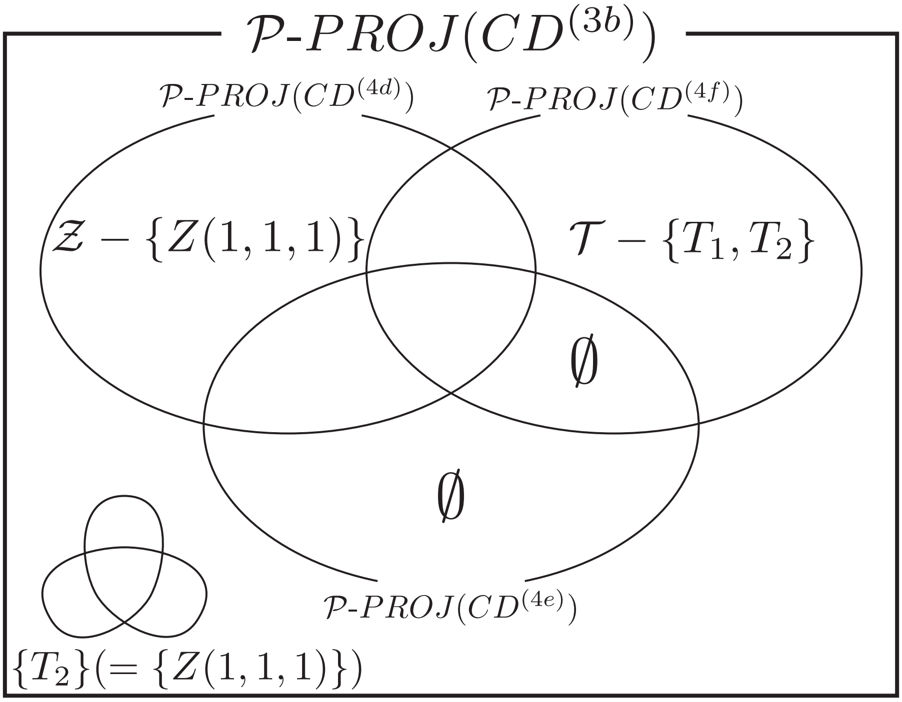
参考文献

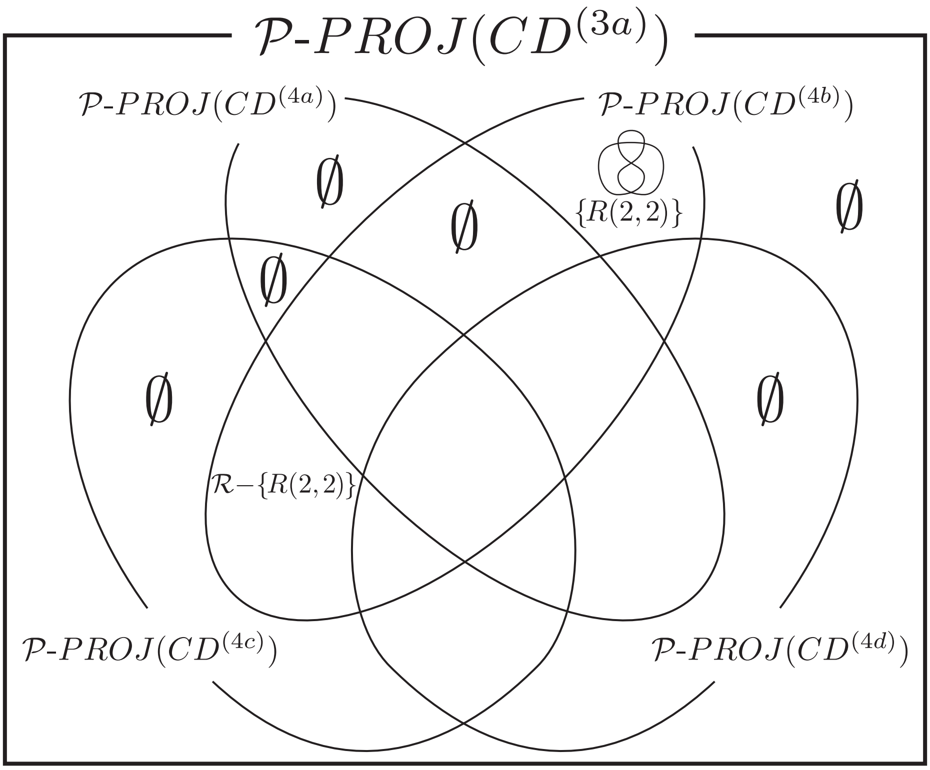
［1］N. Ito and Y. Takimura, A characterization of knot projections by triple chords, preprint.

［2］M. Sakamoto and K. Taniyama, Plane curves in an immersed graph in $\mathbb{R}^2$, *J. Knot Theory Ramifications* **22** (2013), 1350003, 10pp.

［3］Y. Takimura, A preorder of chord diagrams, coming from spherical curve, *Kobe J. Math*. **36** (2019), 21–24.

［4］K. Taniyama, A partial order of knots, *Tokyo J. Math*. **12** (1989), 205–229.


$\mathcal{P}$-$PROJ(CD^{(3b)})$
$\mathcal{P}$-$PROJ(CD^{(4d)})$
$\mathcal{P}$-$PROJ(CD^{(4f)})$
$\mathcal{Z}-\{Z(1,1,1)\}$
$\mathcal{T}-\{T_1,T_2\}$
$\emptyset$
$\emptyset$
$\mathcal{P}$-$PROJ(CD^{(4e)})$
$\{T_2\}(=\{Z(1,1,1)\})$


$\mathcal{P}$-$PROJ(CD^{(3a)})$
$\mathcal{P}$-$PROJ(CD^{(4a)})$
$\mathcal{P}$-$PROJ(CD^{(4b)})$
$\emptyset$
$\emptyset$
$\{R(2,2)\}$
$\emptyset$
$\emptyset$
$\emptyset$
$\emptyset$
$\emptyset$
$\mathcal{R}-\{R(2,2)\}$
$\mathcal{P}$-$PROJ(CD^{(4c)})$
$\mathcal{P}$-$PROJ(CD^{(4d)})$